УДК 513.88

С.Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. пр., НТУ «ХПИ»

КВАЗИРАВНОМЕРНЫЙ ПРЕДЕЛ ЛЕВИТАНОВСКИХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Найдены условия, в некоторых случаях необходимые и достаточные, при которых предел последовательности определенного вида $L-$ почти периодических функций является того же вида $L-$ почти периодической функцией. Таким условием является квазиравномерная сходимость в различных ее определениях.

Ключевые слова: почти периодические функции, $L-$ почти периодические функции, почти автоморфные функции, квазиравномерная сходимость.

Введение. Одно из часто используемых свойств *почти периодических*, *Левитановских почти периодических* и *почти автоморфных функций* – это свойство предельного перехода, в котором чаще всего используется *равномерная сходимость*. На самом деле, она является достаточным (сравнительно легко проверяемым) условием того, чтобы предел был того же вида, что и функции из рассматриваемой последовательности. Целью работы является нахождение более слабых условий, при которых предел последовательности Левитановских почти периодических функций оставался бы Левитановской почти периодической функцией. Рассмотрены и частные случаи Левитановских почти периодических функций – непрерывные почти автоморфные и равномерно непрерывные почти автоморфные функции.

Вспомогательные утверждения и определения. Работа является продолжением статей автора [3] и [4]. Тут использованы основные обозначения и определения из работы [2]. G – это $\sigma-$компактная топологическая группа, e – единица группы. Y – сепарабельное пространство Фреше, $f(t)$ – абстрактная функция, отображающая G в Y, $f_h(t)=f(th)$ – сдвижка, когда h – это элемент группы; когда h – это последовательность элементов, $h=\{h_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}\in G$, то $f_h(t)$ – поточечный предел (если существует) последовательности $f(th_\alpha)$.

Пусть $\rho(.,.)$ - метрика в $Y, N-$конечное множество в G, $\varepsilon>0$. С каждой функции $f(x)$ связано множество

$$B_{N,f,\varepsilon}=\left\{\tau\in G:\max_{a,b\in N}\rho\left[f(a\tau b);f(ab)\right]<\varepsilon\right\}.$$

Определение 1.[3] *Последовательность функций* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t):G \to Y$ *назовем квазиравномерно сходящейся к функции* $f(t)$, $f(t):G \to Y$, *если:*

***а)** она сходится поточечно к функции* $f(t)$, $\lim\limits_{n} f_n(t) = f(t),\ \forall t \in G$;

б) $\forall \varepsilon > 0$, *индекса* K *и любой последовательности* $\{t'_{\beta}\}_{\beta=1}^{\infty} \subset G$ *найдутся индекс* $n_0 > K$ *и подпоследовательность элементов* $\{t_{\beta}\}_{\beta=1}^{\infty} \subset \{t'_{\beta}\}_{\beta=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\rho\left(f\left(t_{\beta}\right), f_{n_0}\left(t_{\beta}\right)\right) < \varepsilon,\ \beta = 1,2,3,\dots .$$

Сформулируем некоторые результаты и определения работ [3] и [1], на которые будем опираться в дальнейшем.

Предложение 1. [3] *Квазиравномерный предел непрерывных функций является непрерывной функцией.*

Предложение 2. [3] *Квазиравномерный предел компактных функций является компактной функцией.*

Предложение 3. [3] *Квазиравномерный по всем подпоследовательностям предел равномерно непрерывных функций является равномерно непрерывной функцией.*

Определение 2 ([1]). *Поточечная сходимость последовательности отображений* $\{f_n\}$ *к отображению* f, *заданных на топологическом пространстве* X *со значениями в метрическом пространстве* Y, *называется* ***квазиравномерной сходимостью по Александрову***, *если для всякого натурального числа* K *существует не более чем счетное открытое покрытие* $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots\}$ *пространства* X *и такая последовательность* $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ *натуральных чисел, больших* K, *что* $\rho(f(x), f_{n_k}(x)) < \varepsilon$ *для всякого* $x \in \Gamma_k$.

Предложение 4.[1] *Квазиравномерная сходимость по Александрову (определение 2) является необходимым и достаточным условием непрерывности предела, если поточечно сходящаяся последовательность состоит из непрерывных функций.*

В 1938 году *Б. М. Левитан* [6], [7] ввел новый класс числовых комплекснозначных почти периодических функций, определенных на числовой оси. *В. А. Марченко* [8] заметил, что $L-$почти периодические ($L-$*п.п.*) числовые функции представляют собой все непрерывные функции на некотором *хаусдорфовом пространстве*, полученном введением на числовой оси особой топологии. *Б. Я. Левин* [5] привел новое определение $L-$*п.п.* числовых функций, заданных на произвольной $\sigma-$компактной группе и доказал основные положения теории $L-$*п.п.* функций. *А. Райх* [9] ввел новое определение числовой комплекснозначной $L-$*п.п.* функции, определенной на топологической группе. Следуя Райха, введем определение абстрактной $L-$*п.п.* функции.

Определение 3. [2] *Непрерывная функция* $f(t): G \to Y$ *называется* $L-$*почти периодической, если* $\forall \varepsilon > 0$ *и конечного множества* $N \subset G$, *существует относительно плотное множество* $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$ *такое, что* $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$.

В работе [2] были получены следующие результаты.

Предложение 5. [2] *Любая* $L-$*почти периодическая функция* $f(x)$ *непрерывна на группе* G *в топологии* $\Im_f$, *определенной множествами* $B_{N,f,\varepsilon}$.

Дана характеристика непрерывных функций в топологии $\Im_f$.

Предложение 6. [2] *Пусть задана* $L-$*почти периодическая функция* $f(t): G \to Y$ *и по ней введена топология* $\Im_f$ *множествами* $B_{N,f,\varepsilon}$ *на группе* G. *Любая непрерывная функция* $g(x): G \to Y$, *которая непрерывна в топологии* $\Im_f$, *является* $L-$*почти периодической функцией.*

Если $L-$*п.п.* функция не одна, а их целое множество, то используется следующая характеристика.

Предложение 7. [2] *Если на группе* G *задано семейство* $L-$*почти периодических функций* $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ *со значениями в пространстве Фреше* Y, *то существует топология* $\Im_f$ *на группе* G, *в которой непрерывны все функции этого семейства и любая функция* $g(x)$, *которая непрерывна в этой топологии, является* $L-$*почти периодической на группе* G.

Если на группе задана топология $\Im$, то будем рассматривать непрерывные функции в этой топологии. Тогда введенная топология $\Im_f$ слабее заданной топологии $\Im$. Почти автоморфные (*п.а.*) функции [10], [4] можно рассматривать как компактные и непрерывные в топологии $\Im$ $L-$*п.п.* функции, что видно из следующего результата.

Предложение 8.[4] *В пространствах Фреше класс компактных* $L-$*почти периодических функций совпадает с классом непрерывных почти автоморфных функций.*

Если $L-$почти периодические функции компактны и равномерно непрерывны в топологии $\Im$, то они называются *равномерными почти автоморфными функциями*.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{f_n\}$ $L-$ *почти периодических функций сходится поточечно к функции* $f(t)$,

$$(f(t)=\lim_{n} f_n(t),\ \forall t\in G).$$

Для $L-$ *почти периодичности предельной функции* $f(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы сходимость была квазиравномерной по Александрову.*

Доказательство. Применим предложение 4 и получим, что предельная функция является непрерывной. По последовательности $\{f_n\}$ на группе G при помощи множеств

$$B_{N,f,\varepsilon,n}=\left\{\tau\in G:\ \max_{a,b\in N}\rho\left[f_n(a\tau b);\ f_n(ab)\right]<\varepsilon\right\}$$

введем топологию $\Im_f$ как в работе [2]. В этой топологии непрерывны все функции последовательности $\{f_n\}$ (предложение 7). Применим к ним предложение 4. Получим, что предел является непрерывной функцией в этой топологии тогда и только тогда, если сходимость квазиравномерная по Александрову. Тогда, согласно предложению 7, предельная функция является $L-$ почти периодической функцией.

Следствие 1. *Квазиравномерный предел по Александрову последовательности* $L-$ *почти периодических функций* $\{f_n\}$, *сходящейся к функции* $f(t)$ *с относительно компактным множеством значений, является почти автоморфной функцией.*

Доказательство. По теореме 1, предельная функция $f(t)$ является $L-$ почти периодической функцией. Используя компактность и предложение 8, получим, что предельная функция является почти автоморфной функцией.

Теорема 2. *Квазиравномерный предел последовательности* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *почти автоморфных функций является почти автоморфной функцией* $f(t)$.

Доказательство. По последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на группе G введем топологию $\Im_f$ как в теореме 1. Все функции непрерывны в этой топологии. По предложению 1, предел является непрерывной функцией и согласно предложению 7, является $L-$ почти периодической функцией. Используя предложение 2, получим, что предел является компактной функцией. Тогда по предложению 8 предел является почти автоморфной функцией.

Следствие 2. *Квазиравномерный предел по всем подпоследовательностям последовательности* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерных почти автоморфных функций является равномерной почти автоморфной функцией* $f(t)$.

Доказательство. По теореме 2, предел является непрерывной почти автоморфной функцией. Из предложения 3 следует, что предел является равномерно непрерывной функцией в первоначальной топологии $\mathfrak{I}$ группы G.

Теорема 3. *Пусть задано множество* G, *и последовательность функций* $f_n(t):G\to Y$, $n=1,2,3,...$, $t\in G$ *сходится поточечно к функции* $f_0(t):G\to Y$. *Пусть также множества значений* $K_n=\{y\in Y:\ y=f_n(t),$ $t\in G\}$ *каждой функции* $f_n(t)$, $n=1,2,3,...$ *и предельной функции* $f_0(t)$ $K_0=\{y\in Y:\ y=f_0(t),\ t\in G\}$ *является относительными компактами. Вместе с каждой функцией* $f_n(t)$, *рассмотрим функцию* $f_{h,n}(t)$ ($f_{h,n}(t)=\lim\limits_k f_n(th_k)$) *и потребуем выполнения условия*

$$\lim_n f_{h,n}(e)=f_{h,0}(e),\quad \forall h=\{h_k\}.$$

Тогда последовательность $f_n(t)$, $n=1,2,3,\ldots$, $t\in G$ *сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям.*

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}\in G$. Рассмотрим последовательность $\{f_n(t_m)\}_{m=1}^{\infty}\in Y$, $n=0,1,2,3,\ldots$. Используя относительную компактность множества значений и диагональный процесс выбора, можно найти подпоследовательность $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, чтобы существовали все пределы

$$\lim_m f_n(h_m)=F_n,\ \ n=0,1,2,...$$

или

$$f_{h,n}(e)=F_n,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

По условию теоремы

$$\lim_n \rho(F_n;\,F_0)=0\,.$$

Тогда, по числу $\varepsilon>0$ найдем число K такое, что при $n_0>K$

$$\rho(F_{n_0};\,F_0)<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

По числу $\varepsilon/4$ выберем L так, чтобы при $m>L$ выполнялись условия

$$\rho(f_{n_0}(h_m);\,F_{n_0})<\frac{\varepsilon}{4}\ \text{ и }\ \rho(f_0(h_m);\,F_0)<\frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Тогда

$$\rho(f_{n_0}(h_m);\,f_0(h_m))\le$$

$$\rho(f_{n_0}(h_m);\,F_{n_0})+\rho(F_{n_0};\,F_0)+\rho(f_0(h_m);\,F_0)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon\,.$$

Это означает, что по любому $\varepsilon>0$ и последовательности $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ найден номер n_0 и последовательность $h_{L+1}, h_{L+2}, h_{L+3}, \ldots$ такие, что выполнены условия определения 1, и последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится квазиравномерно. Легко видеть, что это верно и для любой подпоследовательности функций.

Теорема 4. *Пусть дана последовательность почти автоморфных функций $f_n(t): G \to Y$, $n = 0,1,2,3,\ldots$. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась квазиравномерно по подпоследовательностям к функции $f_0(t)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_n f_{h,\,n}(e) = f_{h,\,0}(e), \quad \forall h = \{h_k\} \in G .$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям. Если для некоторой последовательности $h' = \{h'_k\} \in G$, для которой существуют все пределы

$$f_{h',n}(e) = \lim_k f_n(h'_k), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

не выполняется равенство

$$\lim_n f_{h',n}(e) = f_{h',0}(e), \quad h' = \{h'_k\} \in G,$$

то тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность номеров $n_1, n_2, n_3, \ldots$, такие что

$$\rho(f_{h',n_k}(e);\, f_{h',0}(e)) > \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

С другой стороны, последовательность функций $\{f_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится квазиравномерно, и согласно определению 1 для числа $\varepsilon_0 / 4$ существуют номер p, $p \in \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ и подпоследовательность $\{h_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \{h'_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\rho(f_p(h_m);\, f_0(h_m)) < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \forall m ,$$

где $p = n_k$ для некоторого k. Это противоречит неравенству

$$\rho(f_{h',p}(e);\, f_{h',0}(e)) > \varepsilon_0,$$

так как существует число M, что при

$$m > M \quad \rho(f_p(h'_m);\, f_{h',p}(e)) < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \rho(f_0(h'_m);\, f_{h',0}(e)) < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \le \rho(f_{h',p}(e);\, f_{h',0}(e)) - \rho(f_p(h'_m);\, f_{h',p}(e)) -$$
$$- \rho(f_0(h'_m);\, f_{h',0}(e)) \le \rho(f_p(h'_m);\, f_0(h'_m)),$$

а для достаточно больших m $h_m \in \{h'_m\}_{m=M+1}^{\infty}$ и правая часть меньше $\varepsilon_0 / 4$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы.

Для доказательства достаточности заметим, что все функции имеют относительно компактные множества значений. Далее применим теорему 3.

Выводы. Найдены условия, в некоторых случаях необходимые и достаточные, при которых предел различных видов $L-$почти периодических функций является $L-$почти периодической функцией. Таким условием является квазиравномерная сходимость в различных ее разновидностях. Это требование слабее равномерной сходимости.

Список литературы: **1.** *Александров П. С.* Введение в общую топологию множеств и функций – М.: ОГИЗ, – 1948. **2.** *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Представление $L-$ почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 68'2010, Харків, – С. 65 – 75. **3**. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Необходимые и достаточные условия сходимости почти периодических функций. Сборник статей по результатам международной конференции Тараповские чтения 2012: «Современные проблемы математики, механики и информатики». – ХНУ имени В. Н. Каразина. Механико-математический факультет: Изд-во «Апостроф», – 2012, – С. 332 – 338. **4.** *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на группе. // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 27'2012, Харків, – С. 82 – 85. **5.** *Левин Б.Я.* О почти периодических функциях Левитана // УМЖ. – Т.1, № 1. – 1949, – С. 49 – 101. **6.** *Левитан Б. М.* Новое обобщение почти периодических функций H. Bohr'a // Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва, XV, №2, 1938. **7.** *Левитан Б. М.* Некоторые вопросы теории почти периодических функций // УМЖ. – II, В.6, – 1947, – С.174 – 214. **8.** *Марченко В. А.* Обобщенные почти-периодические функции. // ДАН СССР, – 1950, – Т.XXIV, – №4, – С. 893. **9.** *Reich A.* Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität // Math. Z., – 116, – P. 216 – 234. **10.** *Veech W. A.* Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math., 87. – №3. – 1965. – P. 719 – 751.

Поступила в редколлегию 26.10.2013

УДК 513.88

Квазиравномерный предел левитановских почти периодических функций / С. Д. Димитрова-Бурлаенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 111 – 117. Бібліогр.: 10 назв.

Знайдено умови, в деяких випадках необхідні і достатні, при яких границя послідовності певного виду $L-$ майже періодичних функцій є того ж виду $L-$ майже періодичною функцією. Такою умовою є квазірівномірна збіжність в різних її визначеннях.

Ключові слова: майже періодичні функції, $L-$ майже періодичні функції, майже автоморфні функції, квазірівномірна збіжність.

The conditions, that are necessary and sufficient in some cases, are found at which the limit of a sequence of a certain type of $L-$ almost periodic functions is the same kind of $L-$ almost periodic function. That condition is a quasi-uniform convergence defined in different ways.

Key words: almost periodic functions, $L-$ almost periodic functions, almost automorphic functions, quasi-uniform convergence.